Eine auf dem Merkur abgesetzte Raumkapsel soll einen Erkundungssatelliten in eine Höhe von 100 km abschießen. Dazu müssen die Gravitationskräfte auf Oberflächenniveau und in 100 km Höhe genau berechnet werden.

a) Bestimmen Sie die Beschleunigungskonstante g_{Merkur} auf dem Oberflächenniveau und in 100 km Höhe.
b) Vergleichen sie diese mit der Erdbeschleunigung g in den gleichen Höhen bezogen auf das Oberflächenniveau. Die Erdmasse können sie dabei aus den unten angegebenen Größen berechnen.

Benötigte Konstanten:

$m_{\text{Merkur}} = 3{,}302\ 10^{23}$ kg
$m_{\text{Sonne}} = 1{,}9891\ 10^{30}$ kg
$r_{\text{Erde-Sonne}} = 1{,}496\ 10^{11}$ m
$r_{\text{Merkur}} = 2449$ km
$r_{\text{Erde}} = 6378$ km
$F_{\text{Gravitation Sonne-Erde}} = 3{,}541\ 10^{22}$ N

a) Mit Hilfe der Formel für die Gravitation lässt sich g_{Merkur} für jede beliebige Höhe berechnen.

$$m \cdot g_{Merkur}(r) = \gamma \cdot \frac{m \cdot m_{Merkur}}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad g_{Merkur}(h) = \gamma \cdot \frac{m_{Merkur}}{(r_{Merkur} + h)^2}$$

$$g_{Merkur}(300km) = 6{,}672 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2} \cdot \frac{3{,}302 \cdot 10^{23} kg}{(2449000m + 300000m)^2}$$

$$g_{Merkur}(300km) = 2{,}912 \frac{m}{s^2}$$

$$g_{Merkur}(0km) = 6{,}672 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2} \cdot \frac{3{,}302 \cdot 10^{23} kg}{2449000m^2}$$

$$g_{Merkur}(0km) = 3{,}673 \frac{m}{s^2}$$

b) Zuerst muss die Masse der Erde berechnet werden:

$$F_{Sonne-Erde} = \gamma \cdot \frac{m_{Erde} \cdot m_{Sonne}}{r^2_{Sonne-Erde}}$$

$$\Rightarrow \quad m_{Erde} = \frac{F_{Sonne-Erde} \cdot r^2_{Sonne-Erde}}{\gamma \cdot m_{Sonne}}$$

$$m_{Erde} = \frac{3{,}541 \cdot 10^{22} N \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11} m)^2}{6{,}672 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2} \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} kg}$$

$$m_{Erde} = 5{,}971 \cdot 10^{24} kg$$

Damit lässt sich nun mit den Gleichungen aus Aufgabe a) die Erdbeschleunigung berechnen. Der Radius und die Masse des Merkur muss dabei durch die entsprechenden Größen für die Erde ersetzt werden.

$$g_{Erde}(0km) = \gamma \cdot \frac{m_{Erde}}{r^2_{Erde}}$$

$$g_{Erde}(0km) = 6{,}672 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2} \cdot \frac{5{,}971 \cdot 10^{24} kg}{(6378000m)^2}$$

$$g_{Erde}(0km) = 9{,}79 \frac{m}{s^2}$$

$$g_{Erde}(300km) = 6{,}672 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2} \cdot \frac{5{,}971 \cdot 10^{24} kg}{(6378000m + 300000m)^2}$$

$$g_{Erde}(300km) = 8{,}93 \frac{m}{s^2}$$

Die Abnahme der Gravitationskonstanten ist bei Erde und Merkur absolut betrachtet ungefähr gleich (rund 0,8 m/s^2).